Algorithmen und Datenstrukturen 2

ALGO2 · WiSe-2023/24 · tcs.uni-frankfurt.de/algo2/ · 2024-02-05 · 7ae310c

Übungen zu Woche 8: NP-Härte II

Dienstag

Moodle **8.1 Färbbarkeit.** Wir betrachten die folgende Verallgemeinerung von 3-Color.

> k-Color:
> Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. Können die Knoten $v \in V$ mit höchstens k Farben so gefärbt werden, dass keine Kante zwischen Knoten derselben Farbe verläuft?

a) Beschreibe eine Polynomialzeit-Reduktion von 3-Color auf 4-Color. (Das heißt: Gib eine Funktion an, die eine Instanz von 3-Color auf eine Instanz von 4-Color abbildet.)

b) Beweise, dass deine Polynomialzeit-Reduktion korrekt ist. (Das heißt: Begründe, dass Ja-Instanzen auf Ja-Instanzen abgebildet werden und Nein-Instanzen auf Nein-Instanzen.)

c) Beweise, dass k-Color für jedes $k \geq 3$ NP-schwer ist. (Das heißt: Gib für jedes k eine Polynomialzeit-Reduktion von einem Problem an, das bereits als NP-schwer bekannt ist.)

8.2 Pfade und Spannbäume. Du darfst annehmen, dass das Hamiltonpfadproblem auch in ungerichteten Graphen NP-schwer ist. Zeige, dass die folgenden drei Entscheidungsprobleme NP-schwer sind.

a) Gegeben sei ein ungerichteter Graph G mit n Knoten. Enthält G einen einfachen Pfad, der mindestens $n - 247$ Knoten besucht?

b) Gegeben sei ein ungerichteter Graph G. Enthält G einen Spannbaum, in dem jeder Knoten einen Grad von höchstens 198 hat?

c) Gegeben sei ein ungerichteter Graph G. Enthält G einen Spannbaum mit höchstens 350 Blättern?

Donnerstag

8.3 Ressourcenmanagement. Ein Unternehmen verwaltet High-Performance Echtzeitsysteme mit asynchronen Prozessen, die auf gemeinsame Ressourcen zugreifen müssen. Das System hat eine Menge von n Prozessen und eine Menge von m Ressourcen. Zu jedem Zeitpunkt spezifiziert ein Prozess eine Menge an Ressourcen, die er benutzen möchte. Jede Ressource kann gleichzeitig von mehreren Prozessoren angefragt werden, aber es kann zu jedem Zeitpunkt nur *genau* ein Prozess auf die Ressource zugreifen.

Deine Aufgabe ist es, die Ressourcen an die Prozesse zu verteilen. Wenn ein Prozess alle benötigten Ressourcen zugeteilt bekommt, ist er *aktiv*, ansonsten ist er *blockiert*. Eine effiziente Zuweisung der Ressourcen sorgt dafür, dass möglichst viele Prozesse *aktiv* sind, was sich als das Problem RessourcenReservieren ausdrücken lässt.

> RessourcenReservieren:
> Es sei eine Menge von n Prozessen, eine Menge von m Ressourcen und eine Zahl k gegeben.
> Ist es möglich, die Ressourcen den Prozessen so zuzuweisen, dass mindestens k Prozesse *aktiv* sind?

Gib für jedes Problem auf der folgenden Liste entweder einen Polynomialzeit-Algorithmus an oder zeige, dass das Problem NP-vollständig ist.

a) RessourcenReservieren.
b) RessourcenReservieren eingeschränkt auf den Spezialfall $k = 2$.
c) RessourcenReservieren mit zwei Typen von Ressourcen. Hierbei sind die Ressourcen: Mensch und Maschine. Jeder Prozess benötigt höchstens eine Ressource von jedem Typ. (Anders ausgedrückt braucht jeder Prozess einen bestimmten Menschen und eine bestimmte Maschine, einen bestimmten Menschen, eine bestimmte Maschine, oder gar keine Ressource.)
d) RessourcenReservieren eingeschränkt auf den Spezialfall, dass jede Ressource von maximal zwei Prozessen angefragt wird.

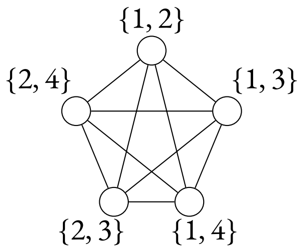

Abbildung 1: Eine schwache Doppel-Färbung.

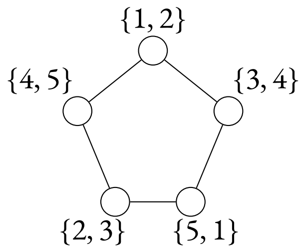

Abbildung 2: Eine starke Doppel-Färbung.

Weitere Aufgaben und Projekte

8.4 Doppel-Färbung. Eine Doppel-Färbung eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ weist jedem Knoten $v \in V$ eine Menge $\{f_1, f_2\}$ von zwei unterschiedlichen Farben f_1, f_2 zu. Es gibt zwei Arten der Doppel-Färbung:

- In einer *schwachen* Doppel-Färbung (siehe Abbildung 1) müssen die zu jeder Kante inzidenten Knoten verschiedene Farbmengen besitzen; die beiden Mengen dürfen sich aber eine Farbe teilen.
- In einer *starken* Doppel-Färbung (siehe Abbildung 2) müssen die zu jeder Kante inzidenten Knoten disjunkte Farbmengen haben; das heißt, es muss sich insgesamt um 4 unterschiedliche Farben handeln.

Jede starke Doppel-Färbung ist auch eine schwache Doppel-Färbung.

a) Zeige, dass es NP-schwer ist, für einen gegebenen ungerichteten Graphen G die minimale Anzahl an Farben in einer schwachen Doppel-Färbung zu finden. *Tipp:* Reduktion von k-Color

b) Zeige, dass es NP-schwer ist, für einen gegebenen ungerichteten Graphen G die minimale Anzahl an Farben in einer starken Doppel-Färbung zu finden.

8.5 Vorsichtige Färbung. Eine echte 5-Färbung eines Graphen $G = (V, E)$ weist jedem Knoten $v \in V$ eine Farbe aus der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ zu, sodass die Knoten $u, v \in V$ für jede Kante $\{u, v\} \in E$ unterschiedliche Farben haben. Eine 5-Färbung ist *vorsichtig*, wenn die Farben adjazenter Knoten sich Modulo 5 um mindestens 2 unterscheiden (der Abstand von 0 zu 4 ist beispielsweise 1, und die Farbe 0 darf nur zu den Farben 2 und 3 adjazent sein). Zeige, dass das Entscheidungsproblem, ob ein gegebener Graph eine vorsichtige 5-Färbung besitzt, NP-schwer ist.

Tipp: Benutze für die Reduktion das normale 5-Color Problem

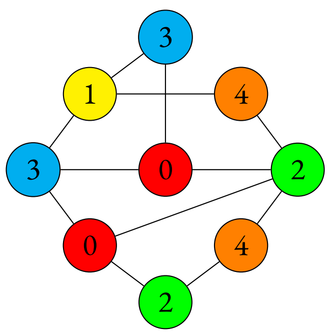

Abbildung 3: Ein Beispiel für eine vorsichtige 5-Färbung.