Algorithmen und Datenstrukturen 2

ALGO2 · WiSe-2023/24 · `tcs.uni-frankfurt.de/algo2/` · 2024-02-05 · *7ae310c*

Übungen zu Woche 12: Lineare Programmierung I

Dienstag

Moodle🐣 **12.1 Lösungsmenge eines LPs.** Betrachte das folgende LP, welches in kanonischer Form gegeben ist.

$$\begin{array}{lrl} \max & 2x_1 + 5x_2 & \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 & \leq 8 \\ & x_1 & \leq 4 \\ & 2x_2 & \leq 7 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

a) 👍 Zeichne das korrespondierende Polytop P in der Ebene.

b) 👍 Finde grafisch eine optimale fraktionale und eine optimale ganzzahlige Lösung.

c) 🔑 Addiert man die erste Nebenbedingung, multipliziert mit $p_1 = 1$, zu der zweiten Nebenbedingung, multipliziert mit $p_2 = 1$, und zu der dritten Nebenbedingung, multipliziert mit $p_3 = 1.5$, dann erhält man

$$2x_1 + 5x_2 \leq 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1.5 \cdot 7 = 22.5.$$

Finde nicht-negative Werte für p_1, p_2, p_3, sodass man, wenn man wie oben vorgeht, $2x_1 + 5x_2 \leq \text{opt}$ für jedes $x \in P$ erhält, wobei opt einer der in Aufgabenteil b) bestimmten optimalen Werte ist.

Moodle🐣 **12.2 Standardform.** Betrachte das folgende LP, welches in kanonischer Form gegeben ist.

$$\begin{array}{lrcrcrl} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \\ \text{s.t.} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq 50 \\ & 3x_1 & + & 10x_2 & + & 6x_3 & \leq 300 \\ & 18x_1 & & & + & x_3 & \leq 40 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

a) 👍 Überführe das LP in seine Standardform, indem du für jede der Gleichungen Schlupfvariablen (*slack variables*) s_1, s_2, s_3 einführst.

b) 🔑 Zähle alle zulässigen (*feasible*) Basen für das LP auf.

12.3 Single-Source Shortest Path LP. Das *Single-Source Shortest Path Problem* kann als LP formuliert werden, welches für jeden Knoten $v \in V(G)$ im Eingabegraphen G mit Quelle $s \in V(G)$ eine Variable d_v hat:

$$\begin{array}{rrll} \max & \sum_v d_v & & \\ \text{s.t.} & d_s & \leq 0 & \\ & d_v - d_u & \leq l_{u\to v} & \text{für alle } uv \in E(G) \\ & d_v & \geq 0 & \text{für alle } v \in V(G) \end{array}$$

Beschreibe das Verhalten des Simplex-Algorithmus auf diesem linearen Programm in Bezug auf die Distanzen. Nimm an, dass die Kantengewichte $l_{u\to v}$ nicht-negativ sind und dass zwischen allen Paaren von Knoten jeweils ein eindeutiger kürzester Weg existiert.

a) Überlege dir zunächst formal, was eine Basis, eine zulässige Basis und eine lokal optimale Basis für dieses lineare Programm sind. Überlege dann, was das intuitiv in Bezug auf den Eingabegraphen bedeutet. Wie hängen Basen mit Suchbäumen mit Wurzel s zusammen?

b) Zeige, dass in einer optimalen Basis jede Variable d_v den gleichen Wert hat, wie die kürzeste-Pfad-Distanz von s zu v.

c) Beschreibe den Simplex-Algorithmus für das Kürzeste-Wege lineare Programm direkt in Bezug auf die Knotendistanzen. Was bedeutet es insbesondere, wenn man eine Pivot-Operation von einer zulässigen Basis zu einer anderen zulässigen Basis ausführt?

Donnerstag

Moodle **12.4 Initiale Basis für Simplex.** In dieser Aufgabe entwickeln wir einen Algorithmus, um eine initiale zulässige (*feasible*) Basis zu berechnen, mit der der Simplex-Algorithmus anfangen kann. Nimm an, wir erhalten ein lineares Programm (P) mit m Variablen und $n + m$ Nebenbedingungen als Eingabe:

$$\begin{array}{rrl} \max & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

Um eine initiale zulässige Basis für (P) zu berechnen, lösen wir ein modifiziertes lineares Programm (P'), für das eine initiale zulässige Basis immer leicht zu finden ist. In (P') gibt es eine neue Variable λ und zwei neue Nebenbedingungen $0 \leq \lambda \leq 1$, und eine neue Zielfunktion:

$$\begin{array}{rrl} \max & \lambda & \\ \text{s.t.} & Ax - b\lambda & \leq 0 \\ & \lambda & \leq 1 \\ & x, \lambda & \geq 0 \end{array}$$

a) Beweise, dass $x_1 = x_2 = \cdots = x_d = \lambda = 0$ immer eine zulässige Basis für (P') ist.

b) Beweise, dass (P) genau dann eine Lösung hat, wenn für (P') der optimale Wert 1 ist.

c) Beschreibe in 1-3 Sätzen, wie wir eine initiale zulässige Basis für (P) berechnen können.

Weitere Aufgaben und Projekte ✒️

12.5 Polyeder. Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein Polyhedron, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

a) 👍 Gib ein Beispiel für ein nicht-leeres P, das für jeden Zielvektor c unbeschränkt ist.

b) 🔭 Beweise, dass P konvex ist.

12.6 Lokal optimale und zulässige Basis. Gegeben sei ein beschränktes, nicht-degeneriertes lineares Programm in kanonischer Form mit n Variablen und $m + n$ Nebenbedingungen auf.

a) 🔭 Argumentiere, dass jede zulässige Basis genau n zulässige (*feasible*) Nachbarn hat.

b) 🔭 Argumentiere, dass jede lokal optimale Basis genau m lokal optimale Nachbarn hat.
Hinweis: Wandle das LP in eine äquivalente Form um.

🔭 **12.7 Carathéodory's Theorem.** Seien $A_1, \ldots, A_n$ Vektoren in $\mathbb{R}^m$.

a) Zeige, dass jedes Element y von

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \; : \; \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \right\}$$

als eine Summe $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ geschrieben werden kann, in der $\lambda_i \geq 0$ für alle Koeffizienten gilt und höchstens m der Koeffizienten λ_i von Null verschieden sind.
Hinweis: Betrachte das Polyhedron

$$\Lambda = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \; : \; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = y, \; \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \right\}.$$

b) Sei P die konvexe Hülle der Vektoren $A_1, \ldots, A_n$, gegeben durch

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \; : \; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \; \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \right\}.$$

Zeige, dass jedes Element $y \in P$ als eine Summe $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ geschrieben werden kann, in der $\lambda_i \geq 0$ für alle Koeffizienten gilt, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ gilt, und höchstens $m + 1$ der Koeffizienten λ_i von Null verschieden sind.